UNIVERSITE IBN-KHALDOUN TIARET
Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie

1ère Année S.N.V (Section 1)		**15/01/2025**
Matière : Mathématiques	**Corrigé Examen**	**Durée : 01h30min**
	Documents interdits – Calculatrice autorisée	

Exercice n°1 :

1. Calculer l'intégrale $\int \frac{1}{e^x+1}dx$ sachant que $1 = 1 + e^x - e^x$
2. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$
3. En utilisant le résultat précédent calculer par partie l'intégrale $\int x\ arc\ tanx\ dx$.

Corrigé de l'exercice n°2:

1. $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dt = \int \frac{1+e^x}{1+e^x}dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx + C = x - ln|1+e^x| + C$
2. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - Arctgx + C$
3. $\int xArctanxdx : \int vdu = uv - \int vdu$

Posons $u = Arctanx \implies du = \frac{1}{x^2+1}dx$

et $dv = xdx \implies v = \frac{x^2}{2}$

$$\int xArctanxdx = \frac{x^2}{2}Arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}Arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Arctgx + C$$

Exercice n°2 :

Soit la fonction f de R dans R définie par :

$$f(x) = \frac{(2x+1)e^x + 2x}{e^x + 1}$$

1. Préciser le domaine de définition D de la fonction f ;
2. Déterminer les réels a, b, c et d tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x + 1}$$
3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition D ;
4. Calculer la dérivée $f'(x)$;
5. Vérifier que pour tout $x \in D$: $\int f(x)dx = x^2 + \ln(e^x + 1) + C$

Corrigé de l'exercice n°2:

1. Le domaine de définition : $D_f =]-\infty, +\infty[$
2. $f(x) = \frac{(2x+1)e^x+2x}{e^x+1} = ax + b + \frac{c}{e^x+1}$

Après calcul on trouve : $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

La fonction devient : $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{e^x+1}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e^x+1} = +\infty$;

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e^x+1} = -\infty$;

4. la dérivée est : $f'(x) = 2 - \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$.

5. $\int f(x)dx = \int 2x + 1 - \frac{1}{e^x+1} dx = 2\int xdx + \int dx - \int \frac{1}{1+e^x} dx = x^2 + x - (x - ln|1 + e^x|) + C$

$$\int 2x + 1 - \frac{1}{e^x+1} dx = x^2 + \ln(1 + e^x) + C$$

Exercice n°3 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = e^x$

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de 0
2. En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - x^3 - 1}{x}$

<u>**Corrigé de l'exercice n°3:**</u>

1. $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{x^4}{4!} + \cdots$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - x^3 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}) - x^3 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} - x^3 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x+\frac{x^2}{2} - 5\frac{x^3}{6}}{x} = 1$

Exercice n°4 :

Soit la fonction de deux variables $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

- Déterminer le domaine de définition de cette fonction ;
- Calculer les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ d'ordre 1 : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

En déduire la différentielle totale $df(x, y)$.

<u>**Corrigé de l'exercice n°4:**</u>

1. Le domaine de définition : $D = \{\forall(x, y) \in R^2 / 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$
   $D = \{\forall(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$
   Le domaine de définition étant à l'intérieur du cercle de rayon inférieur ou égale à 1
2. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
3. $df(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx + \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy$