UNIVERSITE IBN-KHALDOUN TIARET

Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie

1ère Année S.N.V (Section1)		**14/01/2024**
Matière : Mathématiques	**Examen**	**Durée : 01h30min**

Exercice n°1 :

Soit la fonction $f$de R dans R définie par :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{x^2+x-2}$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Préciser le domaine de définition D de la fonction f ;
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition D ;
3. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité au point x=1
4. Déterminer les réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$
5. Calculer la dérivée $f'(x)$;
6. Vérifier que pour tout x$\in D$:$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + 2x - 3ln|x+2| + C$

Corrigé de l'exercice n°1:

1. Le domaine de définition : $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2,1[\cup]1, +\infty[$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 - \frac{3}{x+2} = +\infty$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 - \frac{3}{x+2} = -\infty$;
$\lim\limits_{x\to1+} f(x) = \lim\limits_{x\to1+} x + 2 - \frac{3}{x+2} = 2$
$\lim\limits_{x\to1-} f(x) = \lim\limits_{x\to1-} x + 2 - \frac{3}{x+2} = 2$
$\lim\limits_{x\to(-2)+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)+} x + 2 - \frac{3}{x+2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to(-2)-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)-} x + 2 - \frac{3}{x+2} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$
3. La fonction f est prolongeable par continuité au point x=1 car
$\lim\limits_{x\to1+} f(x) = \lim\limits_{x\to1-} f(x) = 2$

$$\widetilde{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2+4x+1)}{x^2+x-2} & si\ x \neq 1\ et\ x \neq -2 \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$$

4. $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{(x-1)(x+2)} = ax + b + \frac{c}{x+2}$

Après calcul on trouve : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$

La fonction devient : $f(x) = x + 2 - \frac{3}{x+2}$

5. $f(x) = x + 2 - \frac{3}{x+2}$; la dérivée est : $f'(x) = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$.
6. $\int f(x)dx = \int x + 2 - \frac{3}{x+2} dx$

$$= \int xdx + 2\int dx - \int \frac{3}{x+2}dx = \frac{x^2}{2} + 2x - 3ln|x+2| + C$$

Exercice n°2

Donnez le développement limité de la fonction suivante : $f(x) = \sin(x)$
Calculez $\sin(3°)$ avec 5 décimales exactes($3° = \frac{\pi}{60} radians$).

Corrigé de l'exercice n°2 :

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(x)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(x)\frac{(x-a)^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{(x-a)^4}{4!} + \cdots$.

$f(x) = \sin(x)$ Calculez sin3° avec 5 décimales exactes.

$x = 3°$ se trouve au voisinage de zéro donc on utilise le développement de Maclaurin, il faut convertir les degrés en radians c.-à-d. $x = 3°\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{60} = 0{,}052359877559$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)}{1!} + f''(0)\frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^4}{4!} + f^{(5)}(0)\frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^5}{5!} + \cdots$$

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(0) = \cos(0) = 1$$

$$f''^{(0)} = -\sin(0) = 0$$

$$f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$$

$$f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{90}\right) = 0 + 1(0{,}052359877559) + 0 - 1\frac{(0{,}052359877559)^3}{1.2.3} + 0 + \frac{(0{,}052359877559)^5}{1.2.3.4.5} + 0 - \cdots$$
$$= 0{,}052359877559 - 0.000023924596 + \cdots = 0{,}052335952963$$

$$\sin 3° = 0{,}052335952963$$

Exercice n°3 :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 2) $\int Arcsinxdx$

Corrigé de l'exercice n°3 :

1) $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$; Posons le changement de variable suivant: $t = arcsinx \Longrightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(arcsinx)^2}{2} + C$$

2) $\int Arcsinxdx$; On utilise l'intégration par partie $\int vdu = uv - \int vdu$

Posons $u = Arcsinx \Longrightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

et $dv = dx \Longrightarrow v = x$

$\int Arcsinxdx = xArcsinx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int Arcsinxdx = xArcsinx + \int \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}dx = xArcsinx + \sqrt{1-x^2} + C$$

Exercice n°4

Soit la fonction de deux variables $f(x,y) = 1 - \sqrt{1-x^2-y^2}$

- Déterminer le domaine de définition de cette fonction ;
- Calculer les dérivées partielles de la fonction $f(x,y)$ d'ordre 1 : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$
- En déduire la différentielle totale $df(x,y)$.

Corrigé de l'exercice n°4:

1) $D_f = \{(x,y) \in R^2 : 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$
   C'est un cercle de centre (0,0) et de rayon r=1
2) Les dérivées partielles d'une fonction à deux variables $f(x,y)$sont notées par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Pour $f(x,y) = 1 - \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial\, f(x,y)}{\partial y} = -\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

3) La différentielle au point (x, y) d'une fonction à deux variables f est l'expression :

$$df = \frac{\partial\, f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial\, f(x,y)}{\partial y} dy$$

$$df = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy$$